

Title	Closure ニ関スルー問題ヘノ Stone ノ定理ノ應用
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 60 p.15-p.17
Issue Date	1935-10-04
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74138
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

216. Closure = 閉スル一問題へノ Stone, 定理, 應用

吉田 耕 作 (阪大)

Hilbert space \mathcal{H} = 於ケル unitary transformation, one-parameter group $\{U_t\}$ が與ヘラレタトキ, \mathcal{H} の element f が如何ナル條件ヲ満足スレバ, closed linear manifold $\{f_t\} = \{U_t f\}$ — f_t の全テヲ張ラレル一空間, Abschliessung — が \mathcal{H} に一致スルカ?

U_t ヲ measurable トスル。即チ任意ノ $f, g \in \mathcal{H}$ = 對シテ $(U_t f, g)$ = t の函数が measurable トスル。然ラバ Neumann の示シタ如ク $(U_t f, g)$ は t の stetig な函数ニナルカラ Stone の定理ニヨリ

$$(1) \quad (U_t f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d(E(x)f, g)$$

コゝに $E(x)$ は hypermaximal hermitian operator, resolution of identity.

$$\text{故} = (U_t f, g) \frac{\sin \lambda t}{t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d(E(x)f, g) \frac{1}{2} \int_{-\lambda}^{+\lambda} e^{itv} dv$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d(E(x)f, g) \frac{1}{2} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{it(x+v)} dv \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega \frac{1}{2} \int_{\omega-\lambda}^{\omega+\lambda} d(E(x)f, g) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega \frac{1}{2} \left[(E(\omega+\lambda) - E(\omega-\lambda))f, g \right]
\end{aligned}$$

従ッテ

$$\begin{aligned}
(2) \quad &\frac{1}{2} \left[(E(\omega+\lambda) - E(\omega-\lambda))f, g \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} (\cup_t f, g) \frac{\sin \lambda t}{t} dt
\end{aligned}$$

定理. $\{\cup_t f\}$ が h_f 7 張ルタメノ必充條件ハ
 $\{f_\lambda\} = \{E(\lambda)f\}$ が h_f 7 張ルコトデアアル。

上定理ノ應用トシテ Wiener ノ定理 (Fourier integral p. 100) 7 再証明シテミマセウ。即チ

$h_f = L_2(-\infty, \infty)$, $\cup_t f(x) = f(x+t)$ トスル
 ト (2) ヨリ

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} (E(\omega+\lambda) - E(\omega-\lambda))f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(x+t) \frac{\sin \lambda t}{t} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \frac{e^{-i(-\lambda-\omega)t} - e^{-i(\lambda-\omega)t}}{2it} dt \\
\text{故} = f(x), \quad &\frac{e^{-i(-\lambda-\omega)t} - e^{-i(\lambda-\omega)t}}{2it}, \text{ Fourier}
\end{aligned}$$

Transform 7 夫々 $F(y)$, $G_{\lambda, w}(y)$ トスレバ

$$(3) \quad \frac{1}{2}(E(w+\lambda) - E(w-\lambda))F(y) = F(y)G_{\lambda, w}(y)$$

ココニ

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{\lambda, w}(y) = \frac{1}{2}, \quad -\lambda - w < y < \lambda - w \\ \quad \quad \quad = 0, \quad y < -\lambda - w \text{ or } \lambda - w < y \\ \quad \quad \quad = \frac{1}{4}, \quad y = -\lambda - w \text{ or } y = \lambda - w \\ \text{但シ } \lambda > 0 \end{array} \right.$$

概. F.T. ハーツ, unitary transformation 7
カラ $\{E(k)f(x)\}$ が h_y 7 張ルコトハ $\{E(k)F(y)\}$ が
 h_y 7 張ルコトトハ *äquivalent*. 故ニ Wiener ノ
定理

$$h_y = L_2(-\infty, \infty), \quad U_t f(x) = f(x+t)$$

トスルトキ $\{U_t f(x)\}$ が h_y ニ一致スルタメノ必要條件ハ
 $f(x)$ ノ F.T. $F(y)$ ノ zero points ノ measure 0
ナルコトデアル。

ヲ得ル。

以上 formal ナ計算ヲ行ツテ詳シイ議論ヲシマセン
デシタガ計算ノ意味ヲ有スルコトハ x ノ函数 $(E(x)f, g)$
ガ有界変分デアルコトカラタメスク合リマス。